

## Исследование возможностей тензорного анализа сетей массового обслуживания

Пономарев Дмитрий Юрьевич  
Сибирский федеральный университет  
Политехнический институт  
660074, Красноярск, ул. Киренского, 26, (3912)430875  
e-mail: [kafaes@mail.ru](mailto:kafaes@mail.ru)

*Данная работа посвящена исследованию возможностей тензорного метода анализа с помощью имитационного моделирования, а именно, подтверждению возможности использования предложенного инварианта для анализа сетей массового обслуживания.*

*Queuing networks tensor analysis: possibilities investigation.*

*Ponomarev Dmitriy  
Siberian Federal University  
Politechnical Institute  
660074, Krasnoyarsk, Kirenskogo st., 26, (3912)430875  
e-mail: [kafaes@mail.ru](mailto:kafaes@mail.ru)*

*There is present queuing networks tensor analysis possibilities investigation with simulation in GPSS World in particular for chosen invariant confirmation of queuing networks analysis.*

Исследованию систем массового обслуживания посвящено достаточно большое количество работ. Известны результаты, полученные для систем с различными параметрами и характеристиками: по входному потоку, по распределению длительности обслуживания, по количеству обслуживающих приборов, по размерности буфера, приоритетам и т.д. Однако, в связи с тем, что в реальности применение отдельных систем массового обслуживания, а тем более использование систем массового обслуживания, как моделей реальных информационных (измерительных, телекоммуникационных, управляющих) систем, сильно ограничено. Для моделирования большинства реальных комплексов обслуживания информационных потоков достаточно использовать набор систем массового обслуживания с определенной структурой связи между ними, т.е. в качестве модели можно рассматривать сети массового обслуживания.

В данной работе предлагается применить для оценки вероятностно - временных характеристик (ВВХ) сетей массового обслуживания математический аппарат преобразования систем координат, рассматривая сети массового обслуживания, как геометрические объекты, проекции которых в различных системах координат различны, но физические свойства самих объектов при этом не меняются. Основоположником тензорной методологии анализа систем является известный американский ученый и инженер Г. Крон[1]. Дальнейшее развитие идеи тензорного анализа для информационных систем получили в работах Петрова А.Е, Арменского А.Е., Кузнецова О.Л., Петрова М.Н.[2] и др.

Для инженерного анализа ВВХ сетей массового обслуживания (СеМО) в данной работе предлагается использовать в качестве инвариантного уравнения известное выражение для определения коэффициента использования устройств ( $\rho$ ), дающее связь между интенсивностью поступления вызовов ( $\lambda$ ) и средним временем обслуживания  $\bar{p} = \bar{\lambda} \bar{T}_{\text{обсл}}$ . В данной работе предлагается использовать метод анализа вероятностно-временных характеристик систем, основанный на следующих предположениях. Во-первых, что поток вызовов с одной и той же интенсивностью ( $\lambda$ ) поступления вызовет при неизменной интенсивности обслуживания одну и ту же загрузку ( $\rho$ ) устройств при

изменении структуры и можно считать, что будет выполняться соотношение (инвариант):

$$\rho\lambda = \rho'\lambda', \quad (1)$$

где переменные со штрихом для одной структуры сети, без штриха для другой. Во-вторых, объединение систем в единую сеть не вызывает никаких изменений процесса обслуживания информационного потока. В-третьих, изменение структуры сети не предполагает качественное изменение основных соотношений между физическими величинами, описывающими простейший элемент, а определяет только их численное изменение. Данные предположения в литературе получили название постулатов обобщения [1-3].

Тогда, исходя из (1), применив соотношение между интенсивностями исходной и примитивной сетей:  $\bar{\lambda} = \bar{C}\bar{\lambda}'$  и используя известное соотношение  $\rho = \lambda t$ , где  $t$  - среднее время обслуживания одного требования, можно записать:  $\bar{\rho}\bar{C}\bar{\lambda}' = \bar{\rho}'\bar{\lambda}'$ . Далее, находим соотношение между нагрузками примитивной и исходной сетей, как  $\bar{\rho}' = \bar{C}^T \bar{\rho}$  или  $\bar{\rho} = (\bar{C}^T)^{-1} \bar{\rho}'$ , и получаем:  $(\bar{C}^T)^{-1} \bar{\rho}' = \bar{T}\bar{C}\bar{\lambda}'$ . Окончательно уравнение будет иметь вид:

$$(\bar{C}^T \bar{T} \bar{C}) \bar{\lambda} = \bar{C}^T \bar{\rho}', \quad (2)$$

в котором исходная сеть описана в символах примитивной, а, следовательно, известной сети. Далее, решая полученное уравнение относительно  $\lambda$ , находим коэффициенты использования устройств в исходной сети  $\rho$ . Данный подход позволяет при минимальных затратах оценить нагрузку сетей, обеспечив тем самым определение остальных характеристик сети: распределение вероятностей состояний по отдельным системам:  $p_n = f(\rho)$ , а также средней очереди  $\bar{N}$  и среднего времени задержки  $\bar{T}$ .

Применительно к сетям связи, исходя из решения уравнения (2) можно найти: как вероятность потерь пакетов, время задержки (и его девиацию), так и оценить пропускную способность сети в целом. В данной работе ставится задача подтвердить положение (1) средствами имитационного моделирования. Модель исследуемой сети имеет структуру, которая представлена на рис.1.

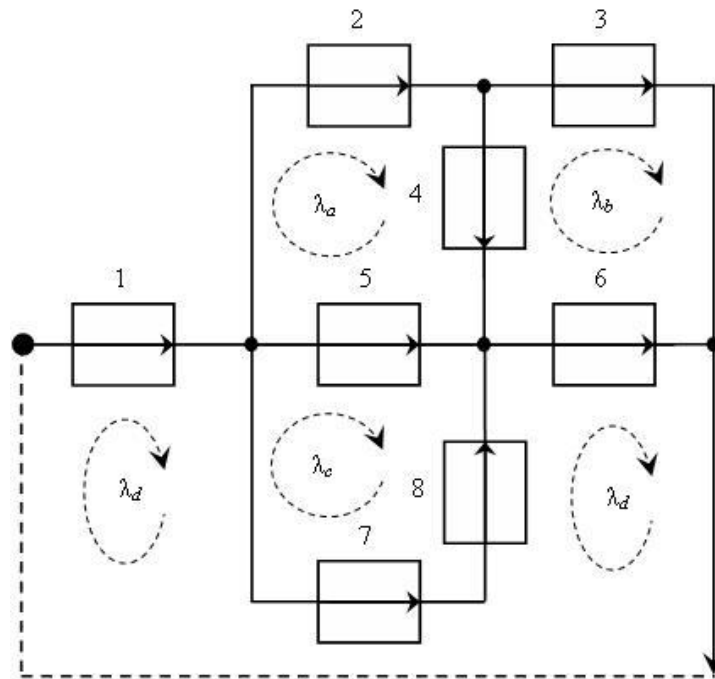


Рисунок 1 – Исследуемая сеть массового обслуживания

Для имитационного моделирования данной сети используем блоки моделей системы массового обслуживания М/М/1, состоящие из блоков QUEUE/DEPART и DEPART/ADVANCE/RELEASE, в точках соединения используются блоки TRANSFER в «разделяющем» режиме с соответствующими вероятностями переходов. Интенсивность обслуживания в устройствах для простоты расчетов возьмем равными 100 выз/ед.времени, интенсивность поступления вызовов в сеть 90 выз/ед.времени. Результаты моделирования представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты имитационного моделирования.

Устройство	Загрузка	Среднее время обслуживания	Значение интенсивности нагрузки в ветви
DEVICE1	0,9	0,01	90
DEVICE2	0,36	0,01	36
DEVICE3	0,108	0,01	10,8
DEVICE4	0,252	0,01	25,2
DEVICE5	0,162	0,01	16,2
DEVICE6	0,792	0,01	79,2
DEVICE7	0,378	0,01	37,8
DEVICE8	0,378	0,01	37,8

Сумма произведений соответствующих  $\rho\lambda$  равна:  $\sum_{i=1}^8 \rho_i \lambda_i = 195,4044$ . Теперь перейдем к анализу исследуемой сети (рис.1) тензорным методом [4,5]. Для этого первоначально определим контурные интенсивности исходя из результатов имитационного моделирования. Из рисунка видно, что  $\lambda_a = \lambda_2$ ,  $\lambda_b = \lambda_3$ ,  $\lambda_d = \lambda_1$ . Интенсивность  $\lambda_c$  найдем из соотношения:  $\lambda_5 = \lambda_c - \lambda_a$ . Следовательно,  $\lambda_a = 36$ ,  $\lambda_b = 10,8$ ,  $\lambda_c = 52,2$ ,  $\lambda_d = 90$ . В терминах тензорного анализа модель, представленная на рис.1, называется исходной сетью. В данной модели для применения контурного метода между узлами 1 и 6 введена мнимая ветвь, которая создает замкнутый контур с интенсивностью  $\lambda_d$ . Дальнейший процесс исследования заключается в определении примитивной сети. В данном случае примитивная сеть состоит из 8 несвязанных друг с другом узлов сети (рис.2).

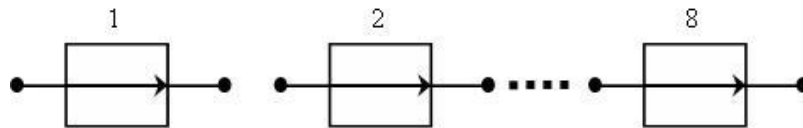


Рисунок 2 – Примитивная сеть

Зададим среднюю длительность обслуживания в примитивной сети, как:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & t_8 \end{pmatrix}. \text{ Тогда, загрузку узлов, выраженную через время обслуживания и}$$

$$\text{интенсивность ветвей можно представить как: } \begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \vdots \\ \rho'_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_8 \end{pmatrix}.$$

Для исходной сети инвариантное уравнение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \\ \rho_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{aa} & t_{ab} & t_{ac} & t_{ad} \\ t_{ba} & t_{bb} & t_{bc} & t_{bd} \\ t_{ca} & t_{cb} & t_{cc} & t_{cd} \\ t_{da} & t_{db} & t_{dc} & t_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы перехода  $\bar{C}$  составляем таблицу соответствия интенсивностей ветвей в примитивной сети и контурных интенсивностей исходной сети (табл.2). Следует отметить, что направления контурных интенсивностей определяются самим исследователем и могут быть заданы произвольно, что, следовательно, приводит к влиянию исследователя (наблюдателя) на процесс исследования, при этом результат остается неизменным [1-4].

Таблица 2. Соответствие интенсивностей модели сети

	$\lambda_a$	$\lambda_b$	$\lambda_c$	$\lambda_d$
$\lambda_1$				1
$\lambda_2$	1			
$\lambda_3$		1		
$\lambda_4$	1	-1		
$\lambda_5$	-1		1	
$\lambda_6$		-1		1
$\lambda_7$			-1	1
$\lambda_8$			-1	1

Окончательно, матрица перехода  $\bar{C}$  будет иметь следующий вид:

$$\bar{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, переходя от одной сети к другой, для загрузки исходной сети получим следующее выражение, из уравнения (2):

$$\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \\ \rho_d \end{pmatrix} = \bar{C}^T \bar{\rho}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \vdots \\ \rho'_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'_2 + \rho'_4 - \rho'_5 \\ \rho'_3 - \rho'_4 - \rho'_6 \\ \rho'_5 - \rho'_7 - \rho'_8 \\ \rho'_1 + \rho'_6 + \rho'_7 + \rho'_8 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, можно записать следующее уравнение в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \rho'_2 + \rho'_4 - \rho'_5 \\ \rho'_3 - \rho'_4 - \rho'_6 \\ \rho'_5 - \rho'_7 - \rho'_8 \\ \rho'_1 + \rho'_6 + \rho'_7 + \rho'_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 & -t_3 & -t_4 & 0 \\ -t_3 & t_2 + t_3 + t_5 & 0 & -t_5 \\ -t_4 & 0 & t_4 + t_6 + t_7 & -t_6 - t_7 \\ 0 & -t_5 & -t_6 - t_7 & t_5 + t_6 + t_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \end{pmatrix} \quad (3)$$

Решая полученное уравнение относительно  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$  можно определить интенсивности поступления вызовов в системы исходной сети, как:

$$(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_8) = \bar{\lambda}^T \bar{C}^T = (\lambda_a \ \lambda_b \ \lambda_c \ \lambda_d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а}$$

коэффициенты использования каждого устройства исходной сети находим через следующее выражение:

$$(\rho_1 \ \dots \ \rho_8) = \bar{\lambda}^T \bar{C}^T \bar{t} = (\lambda_a \ \dots \ \lambda_d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_8 \end{pmatrix}.$$

В данной работе попробуем решить обратную задачу при известных контурных интенсивностях определить параметры примитивной сети (рис.2). Однако, в соответствии с (3) единственное решение можно получить только для четырех интенсивностей из восьми. Поэтому, исключая переменную  $\rho'_5$  из системы уравнений и задавая  $\rho'_4 = 0,2$ ,  $\rho'_6 = 0,9$ ,  $\rho'_7 = 0,8$ ,  $\rho'_8 = 0,5$  находим  $\rho'_1 = 0,248$ ,  $\rho'_2 = 0,956$ ,  $\rho'_3 = 0,164$ , а, следовательно  $\rho'_5 = 0,706$ . Данные значения позволяют получить аналогичные результаты, что и полученные при имитационном моделировании (табл.1). Окончательно, оцениваем сумму произведений  $\rho\lambda$ , как:  $(\lambda_a \ \lambda_b \ \lambda_c \ \lambda_d)(\rho_a \ \rho_b \ \rho_c \ \rho_d)^T = 195,404$ , что подтверждается имитационным моделированием.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:  
имитационное моделирование подтвердило возможность использования предложенного инварианта;  
использование имитационного моделирования совместно с тензорным методом анализа позволяет определить некоторые компоненты начального вектора для примитивной сети, что обеспечивает дополнительные возможности по применению как моделирования, так и аналитических расчетов;  
проведенное моделирование показало, что одно изображение сети через вектор контурных интенсивностей позволяет анализировать сети с различными структурами связей между узлами.

## Литература

1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М: 1978.
2. Петров М.Н. Вероятностно-временные характеристики в сетях и системах передачи интегральной информации. Красноярск: КГТУ. – 1997. – 270с.
3. Петров М.Н., Вережкина Е.В., Захарченко М.О. Тензорная методология в информационных сетях. Красноярск: НИИ СУВПТ. – 2001. – 225с.
4. Пономарев Д.Ю. Тензорный метод для телекоммуникационных сетей // Труды КГТУ. – 2006. – №2-3. – С. 49-56.
5. Пономарев Д.Ю. Исследование вероятностно-временных характеристик информационных сетей тензорным методом // Компьютерные учебные программы и инновации. – 2007. – №7. – С. 160-161.