

УДК 519.872.5

О ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОРНОЙ МЕТОДОЛОГИИ

Д.Ю. Пономарев

Красноярский государственный технический университет
Россия, 660074, Красноярск, ул. Киренского, 26

E-mail: kafaes@krasmail.ru

Ключевые слова: сети массового обслуживания, интенсивность потока вызовов, загрузка системы массового обслуживания

Key word: queuing nets, calling rate, queuing system charging

Моделирование систем различного назначения очень часто сводится к исследованию различных параметров и характеристик систем и сетей массового обслуживания. Теория массового обслуживания предлагает достаточно много возможностей по оценке вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания различного вида, однако объединение систем в единую сеть массового обслуживания приводит к усложнению задачи анализа характеристик систем, особенно при исследовании сетей большой размерности. В данной работе предлагается метод оценки вероятностно-временных характеристик сетей массового обслуживания с использованием тензорной методологии, что позволяет обеспечить более простое решение данной задачи.

Approach of queuing nets analysis with using tensor methodology / D.U. Ponomarev (Krasnoyarsk state technical university, Kirenskogo st. 26, Krasnoyarsk 660074, Russia E-mail: kafaes@krasmail.ru). System modeling often reduce to queuing systems and nets investigation. Queuing theory present many different capabilities for definition probability and time characteristics of queuing systems. However, queuing nets present very difficult task. Tensor methodology let simplify decision this task.

Исследованию систем массового обслуживания посвящено достаточно большое количество работ. Известны результаты, полученные для систем с различными параметрами и характеристиками: по входному потоку (от пуассоновского до фрактальных), по распределению длительности обслуживания (показательное, эрланговское, гамма, детерминированное и др.), по количеству обслуживающих приборов (однолинейные, многолинейные), по размерности буфера, приоритетам и т.д. Однако, в связи с тем, что в реальности применение отдельных систем массового обслуживания, а тем более использование систем массового обслуживания, как моделей реальных информационных (измерительных, телекоммуникационных, управляющих) систем, сильно ограничено. Для моделирования большинства реальных комплексов обслуживания информационных потоков необходимо использовать набор систем массового обслуживания с определенной структурой связи между ними, т.е. в качестве модели требуется применение сетей массового обслуживания.

Сети массового обслуживания также исследуются достаточно давно, существует достаточно много классов сетей с известными результатами, однако при этом достаточно сложно применять полученный математический аппарат для инженерного анализа реальных информационных систем. В связи с этим, а также со все более усложняющимися технологиями обслуживания информационных потоков, увеличением масштабов сетей, усложнением процессов обеспечения качества обслуживания, актуальной становится задача обеспечения дальнейшего развития информационных сетей простым, удобным и понятным аппаратом исследования основных характеристик данных сетей.

В данной работе предлагается применить для оценки вероятностно - временных характеристик (ВВХ) сетей массового обслуживания математический аппарат преобразования систем координат, рассматривая сети массового обслуживания, как геометрические объекты, проекции которых в различных системах координат различны, но физические свойства самих объектов при этом не меняются. Основоположником тензорной методологии анализа систем является известный американский ученый и инженер Г. Крон, который впервые использовал тензорный анализ и топологию в приложении к теории электрических сетей [1]. Дальнейшее развитие идеи тензорного анализа для информационных систем получили в работах Петрова А.Е, Арменского А.Е., Кузнецова О.Л., Петрова М.Н. [2] и др.

Для инженерного анализа ВВХ сетей массового обслуживания (СеМО) в данной работе предлагается использовать в качестве инвариантного уравнения известное выражение для определения коэффициента использования устройств (ρ), дающее связь между интенсивностью поступления вызовов (λ) и средним временем обслуживания:

$$\rho = \lambda t.$$

Применив тензорный метод для сложной сети массового обслуживания, используя понятия исходной и примитивной сети, можно получить выражения для определения загрузки в исходной сети, задавая параметры для примитивной сети. Например, в общем виде для СеМО, состоящей из некоторого числа одноканальных систем с бесконечным буфером (данные параметры не являются ограничением метода) необходимо определить примитивную сеть, состоящую из такого же количества систем и описываемых инвариантным уравнением:

$$\bar{\rho}' = \bar{\lambda}' \bar{t}',$$

найти матрицу перехода (\bar{C}) от одной проекции к другой:

$$\bar{\lambda}' = \bar{C} \bar{\lambda},$$

определить составляющие матричного уравнения:

$$\bar{C}^T \bar{\rho}' = (\bar{C}^T \bar{t}' \bar{C}) \bar{\lambda}.$$

Решая полученное уравнение относительно $\bar{\lambda}$, находим коэффициенты использования устройств в исходной сети $\bar{\rho}$. Данный подход позволяет при минимальных затратах оценить загрузку сетей, обеспечив тем самым определение остальных характеристик СеМО: распределение вероятностей состояний по

матрица средней длительности обслуживания:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix};$$

вектор загрузок:

$$\bar{\rho}' = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Тогда, для примитивной сети можно записать:

$$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \end{pmatrix}.$$

При объединении систем массового обслуживания в сеть, можно выделить контурные интенсивности направление которых определяется исследователем (наблюдателем), которые можно записать как вектор:

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{pmatrix}.$$

К нахождению данного вектора и сводится дальнейшая задача оценки вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания в частности и всей сети в целом. Для этого необходимо определить матрицу перехода (тензор преобразования) от примитивной сети к исходной. Используем матрицу соответствия контурных интенсивностей и интенсивностей в отдельных системах:

Таблица 1. Соответствие между интенсивностями в примитивной и исходной сетях

	a	b	c	d	e	f
1	-	+				
2	+					
3		-	+			
4				-	+	
5				-		+
6			+			-
7			+		-	
8	+			-		
9				+		
10			+	-		
11					-	+

Тогда матрица перехода будет иметь вид:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для исходной сети можно записать:

$$\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \\ \rho_d \\ \rho_e \\ \rho_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{pmatrix}.$$

Используя выражение

$$(\bar{C}^T \bar{t} \bar{C}) \bar{\lambda} = \bar{C}^T \bar{\rho}',$$

составим уравнение для нахождения контурных интенсивностей $\bar{\lambda}$:

$$\begin{pmatrix} t_1 + t_2 + t_8 & -t_1 & 0 & -t_8 & 0 & 0 \\ -t_1 & t_1 + t_3 & -t_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_3 & t_k & -t_{10} & -t_7 & -t_6 \\ -t_8 & 0 & -t_{10} & t_l & -t_4 & -t_5 \\ 0 & 0 & -t_7 & -t_4 & t_m & -t_{11} \\ 0 & 0 & -t_6 & -t_5 & -t_{11} & t_5 + t_6 - t_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\rho_1 + \rho_2 + \rho_8 \\ \rho_1 - \rho_3 \\ \rho_3 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_{10} \\ -\rho_4 - \rho_5 - \rho_8 + \rho_9 - \rho_{10} \\ \rho_4 - \rho_7 - \rho_{11} \\ \rho_5 - \rho_6 + \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$$t_k = t_3 + t_6 + t_7 + t_{10},$$

$$t_l = t_4 + t_5 + t_8 + t_{10},$$

$$t_m = t_4 + t_7 + t_{11}.$$

Решая полученное матричное уравнение находим контурные интенсивности:

$$\lambda_a = 1.363$$

$$\lambda_b = 2.100$$

$$\lambda_c = 2.749$$

$$\lambda_d = 0.798$$

$$\lambda_e = 1.531$$

$$\lambda_f = 2.016$$

Откуда, исходя из известных средних длительностей обслуживания, находим загрузку каждой системы массового обслуживания. Результат сведен в таблицу. Также в таблице представлены результаты имитационного моделирования исследуемой сети в среде GPSS. Сравнение результатов расчета и моделирования показывает практически полное согласование представленных данных.

Таблица 2. Данные по загрузке систем массового обслуживания

СМО	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>Теор</i>	0.590	0.682	0.390	0.586	0.244	0.586	0.244	0.508	0.719	0.780	0.243
<i>GPSS</i>	0.589	0.682	0.391	0.588	0.244	0.587	0.244	0.509	0.717	0.782	0.242

Далее, по известной загрузке можно определить стационарные вероятности СМО сети. В качестве примера на рис.2-3 представлено распределение

вероятностей в СМО №2, №3, №6 и №10. Следует отметить, что для СМО №3, №6, №10 использовалось выражение:

$$p_k = (1 - \rho) \rho^k,$$

а для СМО №2:

$$p_k = \left(1 - \frac{\rho}{4} - \sqrt{\frac{\rho^2}{16} + \frac{\rho}{2}}\right) \left(\frac{\rho}{4} + \sqrt{\frac{\rho^2}{16} + \frac{\rho}{2}}\right)^k \quad [3].$$

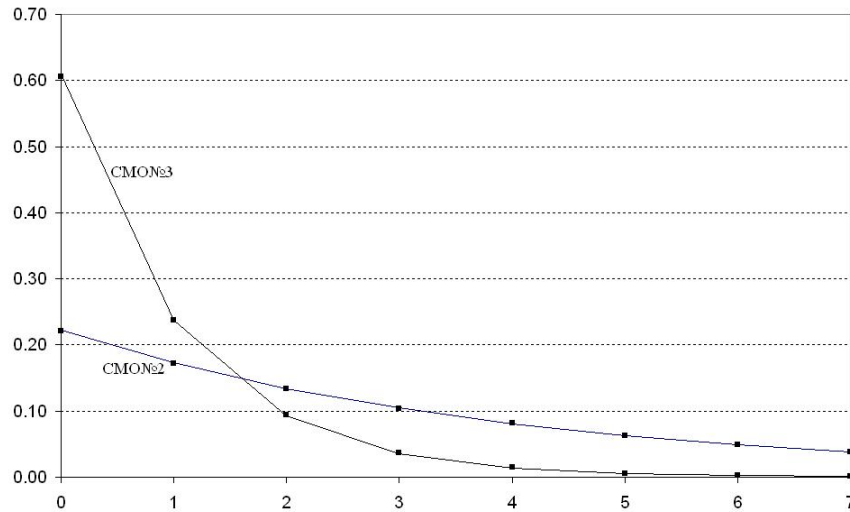


Рис. 2. Распределение вероятностей в СМО №2 и №3

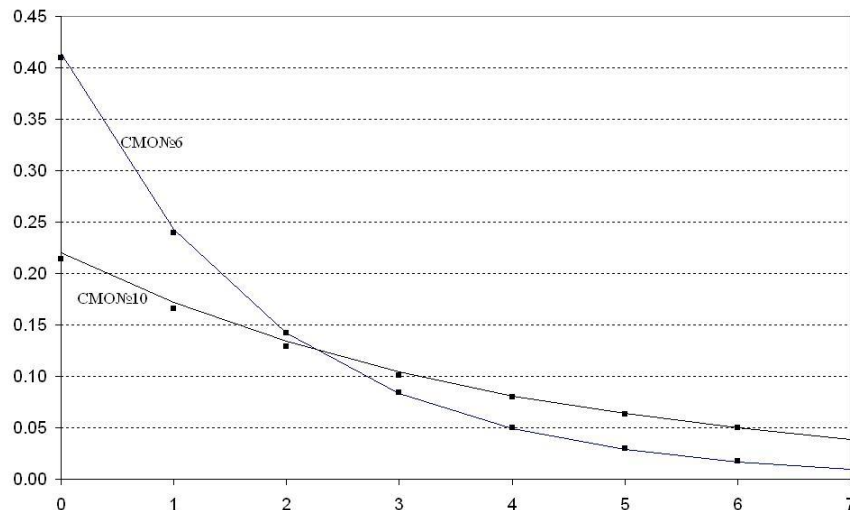


Рис. 3. Распределение вероятностей в СМО №6 и №10

На графиках результаты теоретического расчета представлены сплошными линиями, а результаты моделирования точками маркера. Полученные

данные позволяют сделать вывод о хорошем согласовании результатов теоретических и практических исследований.

Использование полученных значений загрузки не ограничивается получением вероятностных параметров. При известных выражениях для средней очереди и среднего времени задержки можно проводить теоретический анализ временных характеристик систем массового обслуживания, составляющих исследуемую сеть.

В результате можно отметить, что данный подход позволяет при неизвестных теоретических выражениях для некоторого класса СМО оценивать их загрузку, а, следовательно, и анализировать качество обслуживания информационных потоков для сетей практически любой размерности. Кроме того, формализация процедуры определения распределения загрузки по узлам позволяет обеспечить простоту программной реализации данного метода.

Список литературы

1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. М.: Сов. радио, 1978. 720 с.
2. Петров М.Н. Вероятностно-временные характеристики в сетях и системах передачи интегральной информации. Красноярск: КГТУ, 1997. 220 с.
3. Пономарев Д.Ю. К вопросу об обслуживании потоков с гамма распределением // Вестник университетского комплекса ВСФ РГУИТП, НИИ СУВПТ: Сб. научных трудов. 2004. Вып. 2(16). С. 105-114.